Учреждение образования

«Белорусский государственный технологический университет»

**Лабораторная работа №3**

**Метод ветвей и границ. Задача коммивояжера и методы её решения.**

Выполнил:

Студент 2 курса 1 группы ФИТ

Самсоник Анастасия Ивановна

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** освоить общие принципы решения задач методом ветвей и границ, решить задачу о коммивояжере данным методом, сравнить полученное решение задачи с комбинаторным методом перестановок.

**Задание 1.** Сформулировать условие задачи коммивояжера с параметром. Для этого:

* принять элементы матрицы расстояний равными:

где *n* – номер варианта (Вариант 8)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | **INF** | **16** | **29** | **INF** | **8** |
| **2** | **8** | **INF** | **23** | **60** | **76** |
| **3** | **10** | **24** | **INF** | **86** | **57** |
| **4** | **25** | **50** | **32** | **INF** | **24** |
| **5** | **85** | **74** | **52** | **21** | **INF** |

**Задание 2.** Решить сформулированную задачу методом ветвей и границ.

Для определения нижней границы множества воспользуемся **операцией редукции** или приведения матрицы по строкам, для чего необходимо в каждой строке матрицы D найти минимальный элемент.  
di = min(j) dij

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **di** |
| **1** | **INF** | **16** | **29** | **INF** | **8** | **8** |
| **2** | **8** | **INF** | **23** | **60** | **76** | **8** |
| **3** | **10** | **24** | **INF** | **86** | **57** | **10** |
| **4** | **25** | **50** | **32** | **INF** | **24** | **24** |
| **5** | **85** | **74** | **52** | **21** | **INF** | **21** |

Затем вычитаем di из элементов рассматриваемой строки. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | **INF** | **8** | **21** | **INF** | **0** |
| **2** | **0** | **INF** | **15** | **52** | **68** |
| **3** | **0** | **14** | **INF** | **76** | **47** |
| **4** | **1** | **26** | **8** | **INF** | **0** |
| **5** | **64** | **53** | **31** | **0** | **INF** |

Такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент:  
dj = min(i) dij

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | **INF** | **8** | **21** | **INF** | **0** |
| **2** | **0** | **INF** | **15** | **52** | **68** |
| **3** | **0** | **14** | **INF** | **76** | **47** |
| **4** | **1** | **26** | **8** | **INF** | **0** |
| **5** | **64** | **53** | **31** | **0** | **INF** |
| **dj** | **0** | **8** | **8** | **0** | **0** |

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу, где величины di и dj называются **константами приведения**.

Сумма констант приведения определяет нижнюю границу H:  
H = ∑di + ∑dj

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |  |  |  |
| **1** | **INF** | **0** | **13** | **INF** | **0** |  |  |  |
| **2** | **0** | **INF** | **7** | **52** | **68** |  |  |  |
| **3** | **0** | **6** | **INF** | **76** | **47** |  | **H =** | **87** |
| **4** | **1** | **18** | **0** | **INF** | **0** |  |  |  |
| **5** | **64** | **45** | **23** | **0** | **INF** |  |  |  |

Элементы матрицы dij соответствуют расстоянию от пункта i до пункта j.  
Поскольку в матрице n городов, то D является матрицей n x n с неотрицательными элементами dij ≥ 0  
Каждый допустимый маршрут представляет собой цикл, по которому коммивояжер посещает город только один раз и возвращается в исходный город.  
Длина маршрута определяется выражением:  
F(Mk) = ∑dij

Причем каждая строка и столбец входят в маршрут только один раз с элементом dij.

**Шаг №1**.  
**Определяем ребро ветвления** и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i\*,j\*).  
С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на М(бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | **INF** | **0(6)** | **13** | **INF** | **0(0)** |
| **2** | **0(7)** | **INF** | **7** | **52** | **68** |
| **3** | **0(6)** | **6** | **INF** | **76** | **47** |
| **4** | **1** | **18** | **0(7)** | **INF** | **0(0)** |
| **5** | **64** | **45** | **23** | **0(75)** | **INF** |

Наибольшая сумма констант приведения равна (52+23) = 75 для ребра (5,4), следовательно, множество разбивается на два подмножества (5,4) и (5\*,4\*).  
**Исключение ребра** (5,4) проводим путем замены элемента d54 = 0 на *INF*, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества (5\*,4\*), в результате получим редуцированную матрицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **di** |  |  |
| **1** | **INF** | **0** | **13** | **INF** | **0** | **0** |  |  |
| **2** | **0** | **INF** | **7** | **52** | **68** | **0** |  |  |
| **3** | **0** | **6** | **INF** | **76** | **47** | **0** | **H(5\*,4\*) =** | **75** |
| **4** | **1** | **18** | **0** | **INF** | **0** | **0** |  |  |
| **5** | **64** | **45** | **23** | **INF** | **INF** | **23** |  |  |
|  | **0** | **0** | **0** | **52** | **0** | **75** |  |  |

**Включение ребра** (5,4) проводится путем исключения всех элементов 5-ой строки и 4-го столбца, в которой элемент d45 заменяем на М, для исключения образования негамильтонова цикла.  
В результате получим другую сокращенную матрицу (4 x 4), которая подлежит операции приведения.  
После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **5** |
| **1** | **INF** | **0** | **13** | **0** |
| **2** | **0** | **INF** | **7** | **68** |
| **3** | **0** | **6** | **INF** | **47** |
| **4** | **1** | **18** | **0** | **INF** |

**Шаг №2**.  
**Определяем ребро ветвления** и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i\*,j\*).  
С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на *INF* (бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **5** | **di** |
| **1** | **INF** | **0(6)** | **13** | **0(47)** | **0** |
| **2** | **0(7)** | **INF** | **7** | **68** | **0** |
| **3** | **0(6)** | **6** | **INF** | **47** | **0** |
| **4** | **1** | **18** | **0(8)** | **INF** | **0** |
| **dj** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |

Наибольшая сумма констант приведения равна (0 + 47) = 47 для ребра (1,5), следовательно, множество разбивается на два подмножества (1,5) и (1\*,5\*).

**Исключение ребра** (1,5) проводим путем замены элемента d15 = 0 на *INF*, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества (1\*,5\*), в результате получим редуцированную матрицу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **5** | **di** |
| **1** | **INF** | **0** | **13** | **INF** | **0** |
| **2** | **0** | **INF** | **7** | **68** | **0** |
| **3** | **0** | **6** | **INF** | **47** | **0** |
| **4** | **1** | **18** | **0** | **INF** | **0** |
| **dj** | **0** | **0** | **0** | **47** | **47** |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| **H(1\*,5\*)=** | **47** |

**Включение ребра** (1,5) проводится путем исключения всех элементов 1-ой строки и 5-го столбца, в которой элемент d51 заменяем на *INF*, для исключения образования негамильтонова цикла.  
В результате получим другую сокращенную матрицу (3 x 3), которая подлежит операции приведения.  
После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **di** |
| **2** | **0** | **INF** | **7** | **0** |
| **3** | **0** | **6** | **INF** | **0** |
| **4** | **1** | **18** | **0** | **0** |
| **dj** | **0** | **6** | **0** | **6** |

Сумма констант приведения сокращенной матрицы: ∑di + ∑dj = 6  
Так как во втором столбце отсутствует ноль, то находим минимальное число в столбце и отнимает его от каждого значения в столбце и добавляем к минимальному маршруту.

Тогда основной минимальный маршрут теперь равен:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| **H =** | **87+6=93** |

**Шаг №3**.  
**Определяем ребро ветвления** и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i\*,j\*).  
С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на *INF* (бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **di** |
| **2** | **0(7)** | **INF** | **7** | **0** |
| **3** | **0(6)** | **6** | **INF** | **0** |
| **4** | **1** | **18** | **0(8)** | **0** |
| **dj** | **0** | **6** | **0** | **6** |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **di** |
| **2** | **0** | **INF** | **7** | **0** |
| **3** | **0** | **0** | **INF** | **0** |
| **4** | **1** | **12** | **0** | **1** |
| **dj** | **0** | **0** | **7** | **8** |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
| **H(4\*,3\*)=** | **8** |

Наибольшая сумма констант приведения равна (1 + 7) = 8 для ребра (4,3), следовательно, множество разбивается на два подмножества (4,3) и (4\*,3\*).  
**Исключение ребра** (4,3) проводим путем замены элемента d43 = 0 на *INF*, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества (4\*,3\*), в результате получим редуцированную матрицу.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **di** |
| **2** | **0** | **INF** | **7** | **0** |
| **3** | **0** | **0** | **INF** | **0** |
| **4** | **1** | **12** | **INF** | **1** |
| **dj** | **0** | **0** | **7** | **8** |

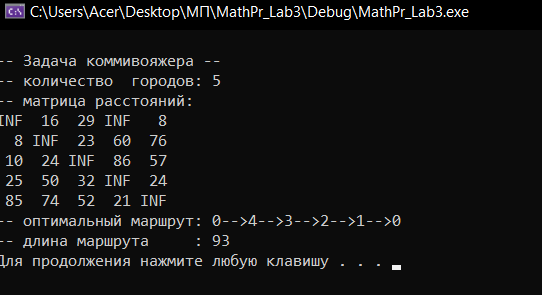
**Включение ребра** (2,1) проводится путем исключения всех элементов 2-ой строки и 1-го столбца, в которой элемент d12 заменяем на *INF*, для исключения образования негамильтонова цикла.  
В результате получим другую сокращенную матрицу (2 x 2), которая подлежит операции приведения.  
После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **2** | **3** | **di** |
| **3** | **0** | **INF** | **0** |
| **4** | **0** | **0** | **0** |
| **dj** | **0** | **0** | **0** |

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:  
∑di + ∑dj = 0

Итоговый маршрут – (4,5), (1,5), (1,2), (3,2), (3,4)  
Длина маршрута равна H = 93

**Задание 3.** Проверка полученного решения при помощи генератора перестановок:



Вывод: В результате лабораторной работы были освоены общие принципы решения задач методом ветвей и границ. Этот метод является одним из наиболее эффективных методов решения задач оптимизации на графах и широко применяется в различных областях, включая логистику, производство и транспортировку. Была решена задача о коммивояжере с использованием метода ветвей и границ. Эта задача является одной из наиболее известных задач комбинаторной оптимизации и представляет собой поиск наименьшего затратного цикла, проходящего через все вершины в графе. Решение задачи было получено с помощью программной реализации метода ветвей и границ. Полученное решение задачи было сравнено и сошлось с комбинаторным методом перестановок.